ÉCOLE NAVALE

Nº 0236

Concours 1981

Première composition de mathématiques

On représente par le symbole exp(x) la fonction exponentielle de base e.

1° Calculer une primitive de la fonction :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x\right).\exp(x\sqrt{2})$$

On pourra y remplacer $\mathrm{tg}^2 x$ par $\mathrm{tg}^2 x + 1 - 1$. En déduire une primitive de la fonction : $\mathrm{tg}^3 x.\exp(x\sqrt{2})$. On pourra de même remplacer $\mathrm{tg}^3 x$ par $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg} x - \mathrm{tg} x$.

2° On se propose de déterminer les valeurs du nombre réel s telles que la fonction $\mathrm{tg}^n x.\exp(sx)$ admette une primitive du type $P_n(\mathrm{tg} x).\exp(sx)$, où P_n est un polynôme de la variable $t = \mathrm{tg} x$, n un entier. On notera a_q le coefficient de t^q dans $P_n(t)$. On suppose d'abord les nombres s et n donnés. Montrer que pour qu'un polynôme P_n convienne, il faut et il suffit que la fonction polynôme associée $P_n(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre, $E_{(n,s)}$, que l'on donnera Montrer que pour $n = 1$ et $n = 2$, $E_{(n,s)}$ n'admet de solution polynôme pour aucune valeur de s. On supposera dans la suite n strictement supérieur à 2.

3° Montrer que s'il existe un polynôme $P_n(t)$ solution de $E_{(n,s)}$, ses coefficients satisfont à un système linéaire de $n + 1$ équations à n inconnues. Écrire la matrice de ce système, examiner son rang lorsque $s = 0$, puis lorsque $s \neq 0$. En déduire que pour que P_n existe, il faut et il suffit que s soit un zéro non nul d'un polynôme Q_n de degré n, défini par un déterminant d'ordre n dont les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à s.

4° Soit $R_n(s)$ le quotient de $Q_n(s)$ par s. Montrer que pour n supérieur à 4, les polynômes $R_n(s)$ satisfont à la relation de récurrence :

$$R_n(s) = s.R_{n-1}(s) - (n-1)(n-2)R_{n-2}(s)$$

Comment définir par convention R_1 et R_2 (et Q_1 et Q_2) pour que cette relation soit vraie pour tout n supérieur à 2 ? Étudier la parité de R_n ; calculer son terme constant, puis le coefficient du terme de degré $n-3$ (n supérieur à 3).

5° Placer les uns par rapport aux autres les zéros de R_3, R_4, R_5. Montrer par récurrence que les zéros de R_n sont tous réels, distincts et séparés par ceux de R_{n-1}. Quel est le P.G.C.D. de R_n et de R_{n-1} ? et celui de R_n et de R_{n-2} ?

6° On choisit pour valeur de s un zéro non nul de R_n. Montrer que les coefficients de $P_n(t)$ sont donnés par :

$$a_p = \frac{(-1)^p}{p!}\,a_0 Q_p(s),$$

et exprimer a_0 en fonction de $Q_{n-1}(s)$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail